

II. Messung des Winkels der optischen Achsen aus der Hyperbelkrümmung.

Von F. Becke.

(Mit 3 Textfiguren.)

Es ist eine bekannte Tatsache, daß in einem Schnitt senkrecht oder annähernd senkrecht zu einer optischen Achse eines zweiachsigen Krystals in der Diagonalstellung der dunkle Balken oder die Isogyre die Gestalt einer hyperbelähnlichen Kurve annimmt, die ihre konvexe Seite der ersten Mittellinie zukehrt, und es ist auch bekannt, daß die Konvexität dieser Kurve abnimmt in dem Maße als der Winkel der optischen Achsen sich dem Grenzwert $2V = 90^\circ$ nähert. In diesem Fall gibt es keinen Unterschied zwischen der ersten und zweiten Mittellinie. Die dunkle Barre erscheint auch in der Diagonalstellung gerade gestreckt.¹⁾

Diese Verhältnisse lassen sich sehr leicht ableiten, wenn man die Skiodromen²⁾ in einem Schnitt senkrecht zur optischen Achse für verschiedene Größe des Achsenwinkels konstruiert.

Es liegt nahe, zu versuchen, ob sich die Krümmung der Hyperbel nicht umgekehrt zu einer Messung des Achsenwinkels verwenden läßt. Dies ist in der Tat auf folgendem Wege möglich.

Mittelst Camera lucida und drehbarem Zeichentisch³⁾ überträgt man auf ein Zeichenblatt die gerade Barre in Normalstellung und die Hyperbel in Diagonalstellung. Es ist nun nicht schwer, in eine stereographische Projektion einzuzeichnen: den Achsenort A_1 und den der Achsenebene entsprechenden größten Kreis BA_1C (Fig. 1).

Die Hyperbel bezeichnet den geometrischen Ort aller Punkte, deren Schwingungsrichtungen 45° einschließen, mit BC . Man kann

¹⁾ Man vergleiche Hauswaldt, Interferenzbilder, I, Taf. 27. Topas $2V = 62^\circ$, Andalusit $2V = 83\frac{1}{2}^\circ$.

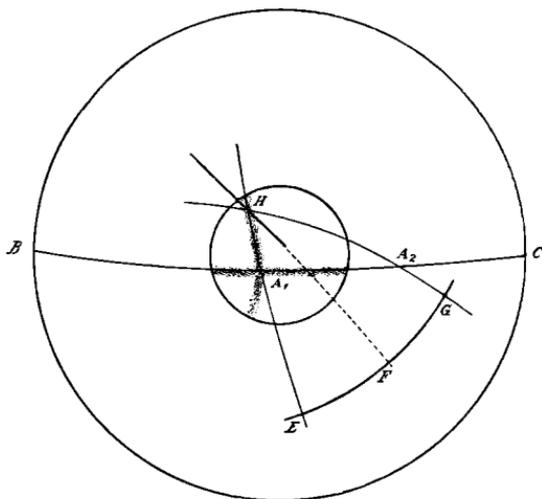
²⁾ Vgl. F. Becke, Optische Untersuchungsmethoden. Denkschriften der kais. Akad. d. Wissensch., 75. Bd., 1904.

³⁾ Vgl. diese Mitt., 14, 563, 1894; 16, 180, 1896.

ohne Schwierigkeit einen passend gelegenen Punkt dieser Hyperbel in die stereographische Projektion eintragen (H).

Für diesen Punkt H muß die Fresnelsche Regel gelten, das heißt die Schwingungsrichtung muß den Winkel halbieren, den die von H nach beiden Achsen A_1 und A_2 gezogenen Großkreise einschließen. Da man den Großkreis HA_1 ziehen kann und die Schwingungsrichtung bekannt ist (unter 45° gegen den Durchmesser BC), läßt sich auch der Großkreis HA_2 konstruieren. Wo er den Großkreis BC schneidet, liegt der gesuchte Achsenort A_2 , womit $2V$ bestimmt ist.

Fig. 1.



Dies das Prinzip der Methode, welches übrigens nicht neu ist, da v. Fedorow für Beobachtungen im parallelen Licht mit dem Universaltisch ein analoges Verfahren angegeben hat.¹⁾

Ausführung der Messung.

I. Übertragung des Interferenzbildes auf das Zeichenblatt.

Zunächst ist erforderlich, die Platte in Normalstellung zu bringen: der Achsenbalken erscheint dann gerade gestreckt und parallel einem Nicolhauptschnitt.²⁾ Um diese Einstellung zuverlässig zu machen,

¹⁾ Zeitschr. f. Krystall., 26.

²⁾ Um eine bestimmte Vorstellung im Auge zu haben, liege der Achsenbalken parallel dem frontalen Hauptschnitt des Mikroskops von links nach rechts.

empfiehlt es sich, vor Einstellung des Interferenzbildes den Nicol-hauptschnitt auf dem Zeichenblatt durch eine gerade Linie zu markieren. Man klappt das Abbesche Würfelchen des Zeichenapparates zurück, schiebt das Okular ein, bringt das Würfelchen wieder in seine Lage und sieht nun das Fadenkreuz des Mikroskopes auf das Zeichenblatt projiziert. Durch Auflegen eines kleinen Kartonlineals (Ecke einer Visitkarte) kann man die gewünschte Linie ziehen. Nun entfernt man das Okular, dreht den Objektisch so lange, bis der Achsenbalken der gezogenen Linie parallel ist, liest die Stellung des Objektisches ab (a), stellt den Zeichentisch auf dieselbe Ablesung (a) und fährt dem Achsenbalken mit dem Stift nach.

Nun dreht man Zeichen- und Objektisch um 45° im Uhrzeigersinn (Ablesung b); es erscheint die Hyperbel¹⁾, man fährt ihrer dunklen Mitte mit dem Stift nach. Der gerade Balken und die Hyperbel schneiden sich im Achsenort A_1 .

Beide Abzeichnungen werden wiederholt, während der Objektisch auf a , b , der Zeichentisch auf $a + 180$, $b + 180$ eingestellt war.

Man erhält so einen zweiten Achsenort A_1' . Der Halbierungspunkt der Strecke $A_1 A_1'$ ist der Mittelpunkt des Gesichtsfeldes C (Vgl. Fig. 2, welche in den starken Linien Achsenbalken und Hyperbel beiläufig in der Größe zeigt, wie sie mit Objektiv 7 von Fuess von meinem Apparat geliefert werden.) Nun beschreibe man um C einen

Kreis mit dem Halbmesser $r = \frac{\sin \rho \cdot \beta}{\alpha}$, wobei β der Brechungsquotient der Platte, α die Mallardsche Konstante des Konoskops; ρ wähle man so groß, daß der Kreis nicht zu nahe dem Rande des Gesichtsfeldes kommt (bei Objektiv 7 von Fuess empfiehlt sich $\rho = 20^\circ$). Der Kreis schneidet die Hyperbeln in den Punkten H und H' , welche den Winkelabständen ρ vom Mittelpunkt entsprechen.

Es ist nicht gut, die Punkte HH' zu nahe dem Rande des Gesichtsfeldes zu wählen, weil sich hier bereits elliptische Polarisierung geltend macht. Die Hyperbeln erscheinen hier schon breit, verwaschen, ihre Mittellinie läßt sich nicht mehr sicher angeben, die Abzeichnung ist daher ungenau. Auch sonstige Störungen wie Doppelbrechung der Linsenränder macht sich hier geltend.

¹⁾ Bei obiger Stellung der Achsenebene wird die Hyperbel von links vorne nach rechts hinten verlaufen.

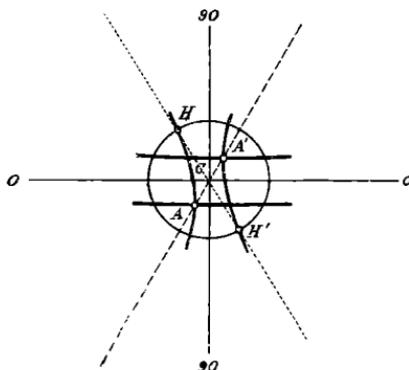
Andrerseits ist es vorteilhaft, wenn AH möglichst groß wird. Zwischen beiden einander widersprechenden Anforderungen muß man einen passenden Ausgleich anstreben.

2. Übertragung der Achsenebene, der Punkte A und H in die stereographische Projektion.

Man verwendet zweckmäßig das Wulffsche Netz und macht die Konstruktion auf durchscheinendem Papier.

Die Achsenebene läßt sich als Großkreis eintragen, wenn bekannt ist: der Durchmesser, über dem der betreffende Meridianbogen steht, und ein Punkt seines Verlaufes, am besten der Achsenort. Die Orientierung des der Achsenebene entsprechenden Durchmessers

Fig. 2.



ist durch den geraden Achsenbalken in der Normalstellung gegeben. Man läßt ihn mit dem ersten Meridian des Projektionsnetzes zusammenfallen.

Um den Achsenort zu finden ist es notwendig, Azimut und Zentralsdistanz zu bestimmen.

Um zunächst das Azimut zu finden, lege man das Zeichenblättchen zentrisch auf das Projektionsnetz, so daß die Richtung des Achsenbalkens mit dem ersten Meridian parallel ist. Zu diesem Zwecke zieht man auf dem schwarzen undurchsichtigen Blättchen durch C zwei Gerade parallel und senkrecht zu den eingezeichneten Achsenbalken und verlängert sie bis an den Rand des Papiers. (Vgl. die dünnen mit 0 und 90 bezeichneten Linien in Fig. 2.) Man kann nun das Blättchen so auf das Netz legen, daß diese Linien mit dem 1. Meridian und mit dem Äquator des Netzes zusammenfallen.

Nun legt man ein Lineal an $A_1 A_1'$ (gestrichelte Linie in Fig. 2) und liest am Rande des Netzes das Azimut der Achse gegen den ersten Meridian ab.

Die Zentraldistanz findet man, indem man die lineare Distanz $A_1 A_1'$ mit dem Millimetermaßstab ausmißt. Ist sie gleich $2d$ gefunden, so ist $\sin w = \frac{d\alpha}{\beta}$ und w die Zentraldistanz des Achsenortes in Graden, wobei α die Mallardsche Konstante des Instrumentes und β der Brechungsexponent der Platte.

Eine Kontrolle ist in folgender Weise möglich. Mißt man den Abstand der beiden geraden Achsenbalken auf dem Zeichenblättchen $= 2a$, so ist $\sin w = \frac{a\alpha}{\beta}$ und w der Abstand des der Achsenebene entsprechenden Großkreises vom Mittelpunkt.

In ähnlicher Weise erfolgt die Übertragung von H . Durch zentrisches Auflegen des Blättchens und Anlegen eines Lineals an HH' (punktirierte Linie in Fig. 2) erfährt man das Azimut. Die Zentraldistanz ist bekannt (ρ).

Nun hat man alle erforderlichen Angaben in der Projektion und es erübrigt nur noch im Punkt H die Fresnelsche Konstruktion auszuführen.

3. Ausführung der Fresnelschen Konstruktion in H.

Zunächst ist die Eintragung der Schwingungsrichtung in H erforderlich. Man zählt vom Äquator 45° gegen den Uhrzeigersinn am Grundkreis ab, verbindet den so gefundenen Punkt mit dem Mittelpunkt und zieht durch H eine Parallele zu diesem Radius (vgl. Fig. 1). Man erhält so bei der angenommenen Stellung von Achsenebene und Achse die passende von den 2 Schwingungsrichtungen. Ferner zieht man durch H und A einen Großkreis, was mit Hilfe des Wulffschen Netzes keine Schwierigkeit hat. Ferner legt man durch H einen Großkreis, welcher die Schwingungsrichtung im Punkt H tangiert. Auch das läßt sich mittelst des Netzes mit einer Genauigkeit von ungefähr einem Grad ausführen. Auf beiden Großkreisen zählt man von H aus 90° ab und erhält so die Punkte E und F . Nun legt man einen Großkreis¹⁾ durch EF und bestimmt auf diesem einen Punkt G so, daß

¹⁾ Da H der Pol dieses Großkreises ist, kann er mittelst des Netzes leicht gefunden werden. Man legt die Projektion so auf das Netz, daß H in den Äquator fällt, und zählt am Äquator von H aus 90° ab. Der durch den gefundenen Punkt gehende Meridian des Netzes ist der verlangte Großkreis.

$EF = FG$. Zieht man nun noch den Großkreis GH , so schneidet dieser die Achsenebene im Pol der zweiten Achse A_2 . Nun kann der Winkel $2V = A_1 A_2$ an der Projektion abgelesen werden.

Die angegebenen Konstruktionen lassen sich bei einiger Aufmerksamkeit mittelst der Wulffschen Netze mit einer Genauigkeitsgrenze von 1° ausführen. Eine größere Genauigkeit anzustreben (was ja auf dem Wege der Rechnung ganz leicht möglich wäre) hat keinen Zweck.

Ein theoretischer Fehler der Methode besteht darin, daß die Fresnelsche Konstruktion angewandt wird, obzwar die Voraussetzungen ihrer Anwendbarkeit nicht streng erfüllt sind.

Im Interferenzbild stehen die Schwingungsrichtungen nicht überall senkrecht aufeinander. Geht man von der orthogonalen Projektion des Interferenzbildes, wie es vom Konoskop geliefert wird, zur stereographischen Projektion über, so werden die Schwingungsrichtungen allerdings senkrecht zueinander. Zeichnet man aber in orthogonaler Projektion über das Gesichtsfeld ein rechtwinkeliges Liniennetz, das die Schwingungsrichtungen der Polarisatoren repräsentiert, so wird dieses Netz beim Übergang zur stereographischen Projektion deformiert. Diese Linien durchschneiden sich nunmehr nur in der Mitte und längs Radien, die mit den Schwingungsrichtungen parallel sind, rechtwinklig, dagegen erscheinen sie in den 4 Quadranten schiefwinklig verzogen, wie die nebenstehende Figur andeutet, wo die punktierten Linien die stereographische Projektion des in orthogonaler Projektion geradlinigen Netzes (ausgezogene Linien) darstellen. Der Kreis entspricht einem Gesichtsfeld von 30° Radius.

Trägt man nun die Schwingungsrichtung des Polarisators oder Analysators so ein, wie es oben angegeben wurde, so entspricht dies nicht ihrer wahren Lage im Moment der Beobachtung und man begeht einen Fehler.

Will man den Einfluß dieser Deformation möglichst herabsetzen, so muß man sich nicht allzusehr von der Mitte des Gesichtsfeldes entfernen. Dies widerspricht der Forderung, für die Konstruktion des Dreieckes $A_1 H A_2$ eine möglichst große Basis $A_1 H$ zu haben.

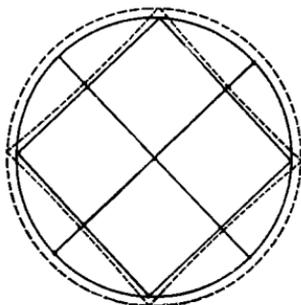
Jedenfalls sollte man danach trachten, den Punkt H so zu wählen, daß er in die Nähe derjenigen Radien des Gesichtsfeldes kommt, die den Schwingungsrichtungen der Polarisatoren parallel sind.

Bei der praktischen Erprobung der Methode hat sich gezeigt, daß es unbedingt nötig ist, sich von den Zentrierungsfehlern des

Instrumentes durch öftere systematische Wiederholung der Messung zu befreien.

Mindestens zwei Paare von Beobachtungen sind erforderlich: nämlich nach der oben beschriebenen eine zweite, bei welcher das Zeichentischchen zur Gewinnung der Punkte A'_1 und H' auf den alten Einstellungsmarken a und b belassen und statt dessen dem

Fig. 3.



Objektisch die um 180° verwendeten Stellungen gegeben wurden. Demnach so:

	Objektisch	Zeichentisch
Erstes Paar von Beobachtungen	a, b	a, b
	a, b	$a + 180, b + 180$
Zweites " " "	a, b	a, b
	$a + 180, b + 180$	a, b

Meist wurden dann noch hinzugefügt:

	Objektisch	Zeichentisch
Drittes Paar von Beobachtungen	$a + 180, b + 180$	$a + 180, b + 180$
	$a + 180, b + 180$	a, b
Viertes " " "	$a + 180, b + 180$	$a + 180, b + 180$
	a, b	$a + 180, b + 180$

Das Mittel der von diesen 4 Blättchen gewonnenen Azimute und linearen Zentraldistanzen wurde dann zur Eintragung in die stereographische Projektion verwendet.

Es hat sich ferner als zweckmäßig herausgestellt, außer der Normalstellung und Diagonalstellung auch noch weitere Zwischenstellungen der Hyperbel zu fixieren; man erhält so mehrere Punkte H ,

die mit der zugehörigen Schwingungsrichtung¹⁾ die Fresnelsche Konstruktion auszuführen erlauben. Jede gibt einen anderen Achsenort A_2 . Aus den verschiedenen Werten $A_1 A_2$ nimmt man dann das arithmetische Mittel.

Die Erprobung an Platten, deren $2V$ bekannt war, lehrte, daß dieses Mittel um so weniger vom wahren Wert $2V$ abwich, je gleichmäßiger die Punkte H über das Gesichtsfeld verteilt waren. Dabei weichen oft die einzelnen Werte um viele Grade vom wahren Wert ab.

Die zweckmäßige Wahl der Zwischenstellungen, d. h. die Wahl der Winkel, um die man die Platte aus der Normalstellung herausdreht, richtet sich nach der Situation der Achse im Gesichtsfeld.

Manchmal erhält man eine günstige Verteilung der H -Punkte, wenn man zur Normalstellung (0°) und Diagonalstellung (45°) noch die Stellungen 15° und 30° hinzunimmt, manchmal ist 30° und 60° günstiger. Ungünstige Situationen entstehen, wenn in dem Dreieck $A_1 H A_2$ der Winkel bei H sehr stumpf oder sehr spitz wird, wenn ferner Achsenebene BC und Bogen HA_2 sich unter kleinem Winkel schneiden.

Man überzeugt sich bald, welche Schnitte für diese Art der Messung am geeignetsten sind.

Ungünstig ist es, wenn die Achse nahezu mit dem Mittelpunkt des Gesichtsfeldes zusammenfällt. Man hat dann eine zu kurze Basis $A_1 H$ zur Konstruktion des Dreieckes $A_2 H A_1$.

Wenn die Achse A_1 zu nahe am Rande des Gesichtsfeldes liegt, ist dies auch nicht günstig, denn dann übersieht man in der Normalstellung nur ein kurzes Stück des Achsenbalkens und kann schwer beurteilen, bei welcher Einstellung der Parallelismus mit dem Nicolhauptschnitt erreicht ist. Zudem gelangt der Achsenbalken dann in die Region des Gesichtsfeldes, in der die elliptische Polarisation sich in störender Weise geltend macht.

Am vorteilhaftesten ist es daher, wenn die Entfernung vom Mittelpunkt bis zum Achsenbalken in Normalstellung ungefähr $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ des Halbmessers des Gesichtsfeldes beträgt.

¹⁾ Man erhält die zugehörigen Schwingungsrichtungen, wenn man im Grundkreis der Projektion vom Äquator aus so viele Grade gegen den Uhrzeigersinn fortschreitet, als die Platte von der Normalstellung aus im Uhrzeigersinn gedreht wurde, und den gefundenen Punkt mit dem Mittelpunkt der Projektion verbindet.

Nicht gleichgültig für den Erfolg der Messung ist auch die Lage der Achse innerhalb der Achsenebene. Die Lage, wie sie in Fig. 1 angenommen wurde: Achse in der einen Hälfte des Gesichtsfeldes, Mittellinie des spitzen Achsenwinkels auf der anderen Seite, ist die günstigste. Liegen Achse und erste Mittellinie auf derselben Seite von der Mitte des Gesichtsfeldes, so ist die Lage ungünstiger, und zwar deshalb, weil die dunkle Barre in dem Raum, der die erste Mittellinie enthält, sich bei der Tischdrehung rascher bewegt, als in dem Raume, der die zweite Mittellinie enthält.

Messungsbeispiele.

Oligoklas von Twedestrand.

Die Beobachtung mag etwas ausführlicher mitgeteilt werden, um den Vorgang bei der Messung zu illustrieren.

Nach Abzeichnung des Querfadens des Fadenkreuzes auf das Zeichenblättchen wird das Okular entfernt und der Achsenbalken durch Drehen des Objektisches parallel jener Linie eingestellt. Das Mittel von 5 Ablesungen ist $202\cdot 1$ und dient als Azimut der Achsenebene. Außerdem werden eingestellt und auf das Zeichenblatt übertragen die Hyperbeln bei Einstellung auf $217\cdot 1$, $232\cdot 1$, $247\cdot 1$, also nach Drehung um 15° , 30° und 45° .

Vier systematisch wiederholte Beobachtungen geben folgende Resultate bezüglich Azimut und Zentraldistanz der Achse A , ferner bezüglich des Azimutes der Punkte H_1 , H_2 , H_3 , für welche die Zentraldistanz $\rho = 20^\circ$ angenommen wurde. Ausgangsrichtung für die Zählung des Azimutes ist der dem Achsenbalken parallele erste Meridian. Das Azimut wird gezählt bis 180° , + im Uhrzeigersinne, — entgegengesetzt.

Nummer der Beobachtung	Azimut Zentraldistanz der Achse		Azimut der Punkte			Gemeinsame Zentraldistanz
			H_1	H_2	H_3	
1 . .	+ 113°	14°	— 13°	— 71°	— 115°	20°
2 . .	+ 119°	14°	— 11°	— 73°	— 118°	
3 . .	+ $113\frac{1}{2}^\circ$	13°	— 14°	— 73°	— 113°	
4 . .	+ 113°	$13\frac{1}{2}^\circ$	— 10°	— 75°	— 117°	
Mittel .	+ 115°	$13\cdot 6^\circ$	— 12°	— 74°	— 116°	20°

Mit diesen Beobachtungsdaten wurde die Konstruktion ausgeführt und es ergab sich

$2V = A_1 A_2$ aus $H_1 83\frac{1}{2}^\circ$, aus $H_2 82^\circ$, aus $H_3 79^\circ$, Mittel $81\cdot5^\circ$.
Der wahre Wert aus der Position der Achsen bestimmt ist $82^\circ 23'$.

Albit von Amelia.

$2V$ aus der Position der Achsen bekannt; $2V = 77^\circ 39'$.

1. Platte. Orientierung der Achse: Azimut $+55^\circ$, Zentraldistanz $= 9^\circ$.

Die Hyperbel wurde abgezeichnet nach Drehung um $+30^\circ$, $+45^\circ$, $+60^\circ$ aus der Normalstellung. Gemeinsame Zentraldistanz der Punkte $H_1 H_2 H_3 = 24^\circ$.

$2V$ aus $H_1 75^\circ$, aus $H_2 76\frac{1}{2}^\circ$, aus $H_3 80\frac{1}{2}^\circ$. Mittel $2V = 77^\circ$.

2. Platte. Achse Azimut $+140^\circ$, Zentraldistanz 14° . Die Hyperbel wurde abgezeichnet nach Drehung des Objektisches um 15° , 30° , 45° . Gemeinsame Zentraldistanz der Punkte $H = 23^\circ$.

$2V$ aus $H_1 82^\circ$, aus $H_2 79\frac{1}{2}^\circ$, aus $H_3 72^\circ$. Mittel 78° .

3. Platte. Achse Azimut $+140^\circ$, Zentraldistanz 15° . Beobachtung der Hyperbel bei Tischdrehung 15° , 30° , 45° . Distanz der Punkte $H = 19\frac{1}{4}^\circ$.

$2V$ aus $H_1 83^\circ$, aus $H_2 76^\circ$, aus $H_3 74\frac{1}{2}^\circ$. Mittel 78° .

An derselben Platte wurde die Beobachtung wiederholt mit größerer Zentraldistanz von $H = 25^\circ$. Die für $2V$ gefundenen Werte $72\frac{1}{2}^\circ$, 74° , $77\frac{1}{2}^\circ$, im Mittel 75° zeigen eine geringere Übereinstimmung mit dem wahren Wert.

Herr Assistent M. Stark¹⁾ bestimmte auf diesem Wege den Achsenwinkel von Olivinen im Basalt von Ustica.

In einem Schliff ergab sich:

$2V$ um $\gamma = 95^\circ$, $96\frac{1}{2}^\circ$, $94\frac{1}{2}^\circ$. Mittel $95\frac{1}{2}^\circ$,

in einem anderen Schliff einer anderen Probe

$2V$ um $\alpha = 86\cdot5^\circ$, 90° , 89° . Mittel $88\cdot5^\circ$,

Diese Beobachtungen, denen noch andere angereicht werden können, erweisen die Brauchbarkeit der Methode, die man allerdings nur dann anwenden wird, wenn bessere und genauere Methoden versagen.

¹⁾ Diese Mitt., Bd. 23, Heft 6.